

Kapitel 12

Der Zeeman-Effekt

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Einfluss eines externen Magnetfelds auf das Spektrum eines Atoms. Wir werden sehen, dass infolge dieser Beeinflussung die Entartung der Energieniveaus teilweise aufgehoben wird und als Folge davon die einzelnen Spektrallinien in mehrere Linien aufgespalten werden. Dieser Effekt wird nach seinem Entdecker Pieter Zeeman *Zeeman-Effekt* genannt. 1902 erhielt er für diese Entdeckung gemeinsam mit Hendrik Antoon Lorentz den Nobelpreis in Physik.

Wir beginnen mit ein paar historischen Bemerkungen zur Entdeckung des Zeeman-Effekts. Anschliessend beschränken wir uns auf das Wasserstoffatom und betrachten ein semiklassisches Modell zur Beschreibung des Effekts, gefolgt von einer quantenmechanischen Behandlung. Am Ende des Kapitels steht die Zusammenfassung der Resultate und die Betrachtung des Zeeman-Effekts für das Spektrum des Wasserstoffatoms.

12.1 Historische Bemerkungen

Im Jahr 1862, also 25 Jahre vor der Entdeckung des Elektrons, untersuchte Michael Faraday in einem Experiment¹ die folgende Frage: Welchen Einfluss hat ein äusseres Magnetfeld auf das Linienspektrum, das von Gasflammen, die durch Alkali- und andere Salze gefärbt werden, emittiert wird? Das Auflösungsvermögen seines einfachen Prismenspektroskops genügte jedoch nicht, um einen Effekt zu finden.

Erst 1896 wurde das Experiment von Michael Faraday von Pieter Zeeman wieder aufgegriffen. Mit seiner Messapparatur konnte er eine Verbreiterung der Spektrallinien nachweisen, die er folgendermassen deutete: Durch das äussere Magnetfeld kommt es zur Aufspaltung der einzelnen Linien in mehrere. Er war zudem in der Lage die Grössenordnung dieser Aufspaltung anzugeben.

Im selben Jahr² gab H.A. Lorentz eine Interpretation der Zeeman Aufspal-

¹Es sei bemerkt, dass das Faradays letztes Experiment war, welches er durchführte. Er litt zum Ende seines Lebens infolge schlechter Durchblutung des Gehirn an schwerem Gedächtnisschwund. Er starb daran 1867.

²Es ist zu bemerken, dass im Jahr 1896 das Elektron noch nicht als Bestandteil des Atoms erkannt wurde und die Entdeckung des Wirkungsquantums h durch Planck noch nicht stattgefunden hat.

ting. Er nahm an, dass in Atomen Teilchen der Ladung q und der Masse m_0 sich auf einer Kreisbahn mit einem bestimmten Radius r_0 bewegen. Die Zentripetalbeschleunigung $a_Z = r_0\omega^2$ soll durch eine Zentripetalkraft F_Z (unbekannten Ursprungs) erzeugt werden. Befindet sich nun dieses Atom in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} , welches senkrecht zur Bahnrichtung der Ladung q gerichtet ist, so wirkt auf diese die Lorentzkraft \vec{F}_L in radialer Richtung nach aussen oder nach innen abhängig vom Umlaufsinn des Teilchens. Damit dieses auf seiner Bahn bleibt, muss im ersten Fall die Winkelgeschwindigkeit ω verkleinert, im zweiten Fall vergrössert werden. Der Betrag der Lorentzkraft \vec{F}_L ist dabei gegeben durch

$$|\vec{F}_L| = |q(\vec{v} \times \vec{B})| = qvB = qr\omega B. \quad (12.1)$$

Es sei nun ω die Winkelgeschwindigkeit ohne Magnetfeld und $\omega + \delta\omega$ die Winkelgeschwindigkeit mit Magnetfeld. Die durch das Magnetfeld bewirkte Änderung $\delta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich durch Gleichsetzen des Betrags $|\vec{F}_L|$ der Lorentzkraft mit der Änderung der Zentripetalkraft δF_Z , wobei δF_Z in erster Näherung gegeben ist durch

$$\delta F_Z \sim \frac{\partial F_Z}{\partial \omega} \delta\omega = 2m_0r\omega\delta\omega. \quad (12.2)$$

Gleichsetzen mit (12.1) liefert

$$2m_0r\omega\delta\omega \sim qr\omega B, \quad (12.3)$$

woraus wir für die durch das Magnetfeld bewirkte Änderung $\delta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit das folgende Resultat erhalten

$$\delta\omega \sim \frac{qB}{2m_0}. \quad (12.4)$$

Wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden, stimmt dieses Resultat mit dem semiklassischen Modell (siehe Abschnitt 12.2) und auch der rein quantenmechanischen Herleitung (siehe Abschnitt 12.3) überein.

Diese Interpretation des Zeeman-Effekts von Lorentz steht im Engen Zusammenhang mit der Entdeckung, dass das Elektron ein Bestandteil des Atoms ist: J.J. Thomson bestimmte 1897 aus der Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen und magnetischen Feld das Verhältnis von Ladung zu Masse. Er verglich sein Ergebnis mit dem Verhältnis q/m_0 , das sich mit Hilfe der Interpretation von Lorentz aus der experimentellen Abschätzung der Zeeman-Aufspaltung $\delta\omega$ ergab und fand innerhalb der damals recht grossen Fehler-schranken Übereinstimmung. Seit jener Zeit weiss man, dass das Elektron ein Bestandteil des Atoms ist.

12.2 Semiklassisches Modell

Wie in der Einleitung des Kapitels erwähnt, beschränken wir uns im Folgenden auf die Behandlung des Wasserstoffatoms. Wir beginnen mit einer semiklassischen Behandlung. Dabei gehen wir vom Bohrschen Atommodell (siehe

Kapitel 8) aus, indem wir annehmen, dass sich im Wasserstoffatom das negativ geladene Elektron auf einer Kreisbahn um den positiv geladenen Kern bewegt (vgl. Abb. 12.1). Durch dieses kreisende Elektron wird ein Kreisstrom I erzeugt, welcher ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ antiparallel zur Flächennormalen \vec{n} hervorruft

$$\vec{\mu} = IA\vec{n}, \quad (12.5)$$

wobei A die von der Kreisbahn eingeschlossene Fläche bezeichnet. Der Strom I lässt sich durch die Elektronenladung $-e$ und die Umlauffrequenz ν ausdrücken und die Fläche A durch den Bahnradius r . Es ergibt sich

$$\vec{\mu} = IA\vec{n} = -e\nu\pi r^2\vec{n}. \quad (12.6)$$

Wir vergleichen diesen Ausdruck für das magnetische Moment $\vec{\mu}$ mit dem Drehimpuls \vec{l} des Elektrons

$$\vec{l} = mvr\vec{n} = 2\pi m\nu r^2\vec{n} \quad (12.7)$$

und erhalten

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{l}. \quad (12.8)$$

Das Verhältnis von magnetischem Moment $\vec{\mu}$ zu Drehimpuls \vec{l} wird *gyromagnetisches Verhältnis* genannt und mit γ bezeichnet

$$\gamma = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{l}|} = \frac{e}{2m}. \quad (12.9)$$

Das nächste Ziel ist die potentielle Energie U des Elektrons in einem homogenen externen Magnetfeld \vec{B} zu bestimmen. Sie ist gegeben durch

$$U = -\vec{\mu}\vec{B} = -|\vec{\mu}||\vec{B}|\cos\vartheta, \quad (12.10)$$

wobei ϑ den Winkel zwischen magnetischem Moment $\vec{\mu}$ und Magnetfeld \vec{B} bezeichnet. Demzufolge erreicht die potentielle Energie U ihr Minimum für $\vartheta = 0$, d.h. wenn $\vec{\mu}$ parallel zu \vec{B} ausgerichtet ist und ihr Maximum für $\vartheta = \pi$, d.h.

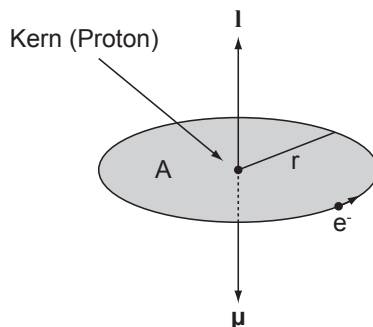


Abb. 12.1: Semiklassisches Modell des Zeeman-Effekts. Skizze eines Wasserstoffatoms: Ein Elektron umkreist den Kern auf einer Kreisbahn und ruft ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ hervor.

wenn $\vec{\mu}$ antiparallel zu \vec{B} ausgerichtet ist. Mit (12.8) erhalten wir für die potentielle Energie U des Elektrons mit Drehimpuls \vec{l}

$$U = \frac{e}{2m} |\vec{l}| |\vec{B}| \cos \vartheta. \quad (12.11)$$

Quantenmechanisch (vgl. Abschnitt 11.2) ist die z-Komponente l_z des Drehimpuls \vec{l} gegeben durch

$$l_z = |\vec{l}| \cos \vartheta = m_l \hbar, \quad (12.12)$$

wobei die magnetische Quantenzahl m_l nur die diskreten Werte $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ annehmen kann. Somit ergibt sich für die potentielle Energie U_{m_l} des magnetischen Moments des Elektrons im Wasserstoffatom

$$U_{m_l} = m_l \frac{e\hbar}{2m} |\vec{B}| = m_l \mu_B |\vec{B}|, \quad (12.13)$$

wobei $\mu_B = e\hbar/(2m) = 9.27 \cdot 10^{-24}$ J/T das *Bohr-Magneton* bezeichnet und wir den Index m_l eingeführt haben. U_{m_l} wird Zeeman-Energie genannt. Damit ergibt sich für die Energiewerte E_{n,m_l} des Wasserstoffatoms (vgl. Abschnitt 11.2.3) im homogenen externen Magnetfeld \vec{B} die folgende Korrektur

$$E_{n,m_l} = E_n + U_{m_l} = -\frac{E_R}{n^2} + m_l \mu_B |\vec{B}| = -\frac{E_R}{n^2} + m_l \hbar \omega_L, \quad (12.14)$$

wobei $\omega_L = e|\vec{B}|/(2m)$ die *Larmor-Frequenz* bezeichnet und wir für die Energiewerte den zusätzlichen Index m_l eingeführt haben. Das bedeutet, dass durch ein homogenes externes Magnetfeld \vec{B} die durch die magnetische Quantenzahl m_l bewirkte $(2l + 1)$ -fache Entartung der Energiewerte E_n aufgehoben wird. Abb. 12.2 gibt eine Übersicht über die Aufspaltung der *s*-, *p*- und *d*-Niveaus des Wasserstoffatoms. Die *s*-Niveaus ($l = 0, m_l = 0$) werden durch das Magnetfeld nicht beeinflusst. Die *p*-Niveaus ($l = 1, m_l = 0, \pm 1$) werden in drei und die *d*-Niveaus ($l = 2, m_l = 0, \pm 1, \pm 2$) in fünf Niveaus mit Abstand $\Delta = \mu_B |\vec{B}|$ aufgespalten.

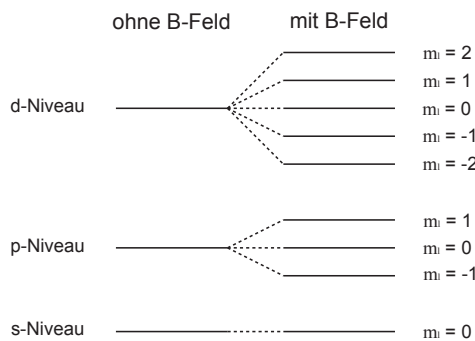


Abb. 12.2: Zeeman-Effekt: Aufspaltung der *s*-, *p*-, *d*-Energieniveaus des Wasserstoffatoms im homogenen externen Magnetfeld.

12.3 Quantenmechanische Betrachtung

Nach der semiklassischen Behandlung des Zeeman-Effekts kommen wir zur quantenmechanischen Betrachtung. Wir starten mit der allgemeinen Hamiltonfunktion H für ein Teilchen der Ladung q und Masse m im Magnetfeld \vec{B}

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \quad \text{mit } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (12.15)$$

wobei \vec{A} das sogenannte *Vektorpotential* bezeichnet. Mit $\hat{p} = (\hbar/i)\vec{\nabla}$ erhalten wir für den entsprechenden Hamiltonoperator \hat{H} den folgenden Ausdruck

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{\hbar q}{2mi} (\vec{\nabla} \vec{A} + \vec{A} \vec{\nabla}) + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2. \quad (12.16)$$

Wir verwenden nun die sogenannte Coulombbeingung³ $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$ und erhalten

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{i\hbar q}{m} \vec{A} \vec{\nabla} + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2. \quad (12.17)$$

Wir kommen nun zum Spezialfall eines Elektrons (Ladung $q = -e$) im homogenen Magnetfeld \vec{B} . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir \vec{B} entlang der z-Achse, d.h. $\vec{B} = (0, 0, B)$. Das entsprechende Vektorpotential \vec{A} können wir schreiben als

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} yB \\ -xB \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.18)$$

da

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} yB \\ -xB \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \vec{B}. \quad (12.19)$$

Einsetzen von (12.18) in (12.17) liefert für den Hamiltonoperator \hat{H} eines Elektrons im homogenen Magnetfeld

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{i\hbar e}{2m} \begin{pmatrix} yB \\ -xB \\ 0 \end{pmatrix} \vec{\nabla} + \frac{e^2}{8m} \begin{pmatrix} yB \\ -xB \\ 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{eB}{2m} \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{e^2 B^2}{8m} (x^2 + y^2) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \underbrace{\frac{eB}{2m} \hat{L}_z}_{(1)} + \underbrace{\frac{e^2 B^2}{8m} (x^2 + y^2)}_{(2)}, \end{aligned} \quad (12.20)$$

³Die Coulombbeingung ist eine mögliche Eichtransformation. Allgemein resultiert aus einer solchen Transformation des Hamiltonoperators und damit der Schrödingergleichung ein zusätzlicher orts- und zeitabhängiger Phasenfaktor der Wellenfunktion. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion, d.h. die physikalisch bedeutungsvolle Wahrscheinlichkeitsdichte, bleibt jedoch unverändert.

wobei wir im letzten Schritt benützt haben, dass $\hat{L}_z = (x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$.

Wir vergleichen die Grössenordnungen der Terme (1) und (2) des Hamiltonoperators \hat{H} von Elektronen in Atomen. Wir benützen dazu, dass $B = |\vec{B}| \sim 1$ T, $\langle \hat{L}_z \rangle \sim \hbar \sim 10^{-34}$ Js, $e \sim 10^{-19}$ C, $m \sim 10^{-31}$ kg, $x, y \sim 10^{-9}$ m und erhalten

$$\left| \frac{eB}{2m} \langle \hat{L}_z \rangle \right| \sim 10^3 \left| \frac{e^2 B^2}{8m} (x^2 + y^2) \right|. \quad (12.21)$$

Demzufolge können wir Term (2) gegenüber Term (1) für ein Elektron in Atomen unter dem Einfluss eines homogenen externen Magnetfelds vernachlässigen. Damit lautet der Hamiltonoperator \hat{H} für das Wasserstoffatom im homogenen externen Magnetfeld

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{eB}{2m} \hat{L}_z \quad \text{mit} \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (12.22)$$

Nach Abschnitt 11.2.4 sind die Wellenfunktionen $u_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi)$ sowohl Eigenfunktionen des Hamiltonoperators \hat{H}_0 mit den Eigenwerten $E_n = -E_R/n^2$ als auch des Operators \hat{L}_z mit den Eigenwerten $\hbar m_l$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \hat{H}u_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) &= \left(\hat{H}_0 + \frac{eB}{2m} \hat{L}_z \right) u_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \left(-\frac{E_R}{n^2} + \frac{eB}{2m} \hbar m_l \right) u_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \left(\underbrace{-\frac{E_R}{n^2} + \hbar\omega_L m_l}_{=E_{n,m_l}} \right) u_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (12.23)$$

Folglich sind die Energiewerte E_{n,m_l} des Wasserstoffatoms im homogenen externen Magnetfeld gegeben durch

$$E_{n,m_l} = -\frac{E_R}{n^2} + \hbar\omega_L m_l. \quad (12.24)$$

Dieses Resultat stimmt mit dem semiklassischen Resultat (12.14) überein.

12.4 Das Spektrum des Wasserstoffatoms im Magnetfeld (Auswahlregeln)

Wir betrachten nun den Effekt eines homogenen externen Magnetfelds auf das Spektrum des Wasserstoffatoms. Die semiklassische Behandlung (siehe Abschnitt 12.2) und die quantenmechanische Behandlung (siehe Abschnitt 12.3)

haben gezeigt, dass die Existenz eines homogenen externen Magnetfelds die Aufspaltung der Energieniveaus des Wasserstoffatoms zur Folge hat. Diese Aufspaltung der Energieniveaus führt zu zusätzlichen Übergängen und damit zu zusätzlichen Spektrallinien im Spektrum des Wasserstoffatoms. Jedoch ist die Anzahl der Übergänge durch die sogenannten *Auswahlregeln* (siehe Abschnitt 15.3) beschränkt. Diese geben Auskunft, ob ein Übergang zwischen zwei Energieniveaus unter Emission oder Absorption eines Photons möglich ist oder nicht. Beim Wasserstoffatom lauten die Auswahlregeln:

Der Übergang zwischen zwei Energieniveaus E_{n,l,m_l} und E_{n',l',m'_l} des Wasserstoffatoms unter Emission oder Absorption eines Photons ist möglich, falls die Unterschiede der entsprechenden Quantenzahlen $\Delta n = n - n'$, $\Delta l = l - l'$ und $\Delta m_l = m_l - m'_l$ die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\Delta n \text{ beliebig,} \tag{12.25}$$

$$\Delta l = \pm 1, \tag{12.26}$$

$$\Delta m_l = 0, \pm 1. \tag{12.27}$$

Da der Abstand $\Delta = \mu_B |\vec{B}|$ benachbarter Zeeman-Energieniveaus von den Quantenzahlen n und l unabhängig ist, spalten sich die Frequenzen der erlaubten Übergänge durch den Einfluss eines homogenen externen Magnetfelds in drei Frequenzen auf (siehe Abb. 12.3). Diese drei Frequenzen werden *Lorentzsches Triplet* genannt. Ist die Frequenz der Spektrallinie ohne Magnetfeld ω , dann sind die Frequenzen im Lorentzschen Triplet gegeben durch

$$\omega - \omega_L, \omega, \omega + \omega_L \text{ mit } \omega_L = \frac{eB}{2m}, \tag{12.28}$$

wie Lorentz schon auf rein klassischem Weg herausfand (siehe Abschnitt 12.1).

Wenn das Lorentzsche Triplet auftritt, dann spricht man vom *normalen Zeeman-Effekt*. Die Gründe für diese Bezeichnung sind rein historisch. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass der normale Zeeman-Effekt nur ein Spezialfall des

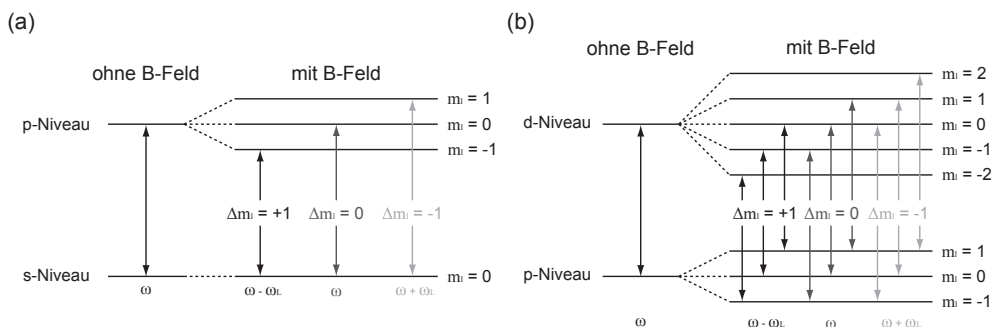


Abb. 12.3: Zeeman-Effekt: Illustration der Auswahlregeln im Energiediagramm für das Wasserstoffatom für die Übergänge zwischen (a) p - und s -Niveaus und (b) d - und p -Niveaus.

sogenannten *anomalen Zeeman-Effekts* ist, bei dem der Spin des Elektrons (siehe Kapitel 13) mitberücksichtigt wird. Beim Wasserstoffatom ist deshalb in der Realität die Aufspaltung komplizierter und nicht alleine durch den Drehimpuls erklärbar.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch, und H. Schmidt, *Optik für Ingenieure, Grundlagen*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [2] A.H. Compton, Phys. Rev. **21**, 483 (1923).
- [3] http://www.satgeo.de/satgeo/quicklooks/methoden/fe_physik.htm, 27.10.2010.
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Sonne>, 27.10.2010.
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenradius>, 27.10.2010.
- [6] <http://de.wikipedia.org/wiki/Emissionsgrad>, 27.10.2010.
- [7] <http://www.periodensystem.info/download/>, 22.02.2011.
- [8] H. Haken, und H. Wolf, *Atom- und Quantenphysik, Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [9] <http://www2.selu.edu/Academics/Faculty/delbers/emission-spectra-1.jpg>, 14.01.2011.
- [10] F. Schwabl, *Quantenmechanik (QM I), Eine Einführung*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [11] A. Goldberg, H.M. Schey, und J.L. Schwartz, American Journal of Physics **35**, 177 (1967).
- [12] J. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, Berlin, 2006.