Physik IV 2011 - Übung 8

21. April 2011

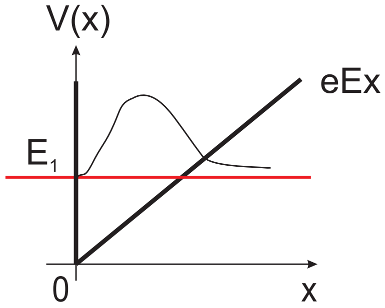
1. **Messprozess und nicht-kommutierende Observablen** $\sum 2$
   Die Observable A besitzt die Eigenfunktionen ψ_1 und ψ_2 mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Eine weitere Observable B besitzt die Eigenfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 mit Eigenwerten b_1 und b_2, die mit den Eigenfunktionen von A im folgenden Zusammenhang stehen:

   $$\phi_1 = (\psi_1 + 2\psi_2)/\sqrt{5} \quad \phi_2 = (2\psi_1 - \psi_2)/\sqrt{5}.$$

   Bei einer Messung von B wird der Wert b_1 gemessen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einer darauffolgenden Messung von A die Werte a_1 bzw. a_2 zu erhalten? B wird daraufhin nochmals gemessen, wie hoch ist diesmal die Wahrscheinlichkeit den Wert b_1 zu finden?

2. **Dreieckförmiger Potentialtopf** $\sum 3$

   Ein Teilchen befinde sich in einem dreieckförmigen Potentialtopf mit konstantem elektrischen Feld und einer unendlich hohen Barriere bei $x = 0$ (siehe Abbildung).



   (a) Berechnen Sie die möglichen Energie-Eigenwerte des Teilchens. (Hinweis: Die Lösungen der Differentialgleichung $d^2y/dx^2 - xy = 0$ sind durch die Airy-Funktionen gegeben.) [$1\frac{1}{2}$]

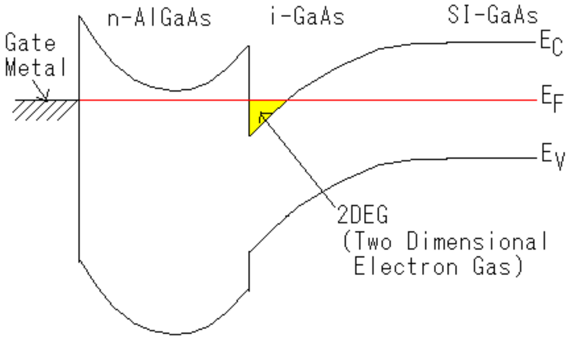


Abbildung 1: Energiebänder eines HEMT (http://en.wikipedia.org/wiki/2DEG).

(b) Skizzieren Sie die Wellenfunktionen der ersten zwei Eigenzustände. [$\frac{1}{2}$]

(c) Ein sogenannter high-electron-mobility-transistor (HEMT) basiert auf einer Heterogen-Verbindung zwischen zwei Halbleitern. An der Grenzfläche entsteht durch die Umverteilung der Ladungen ein internes elektrisches Feld, das durch ein dreieckförmiges Potential orthogonal zur Grenzfläche der Halbleiter (x-Richtung) beschrieben werden kann. In y- bzw. z- Richtung können sich die Elektronen frei bewegen und die Schrödingergleichung kann bezüglich dieser Raumrichtungen unabhängig von z gelöst werden. Wenn die Aufspaltung der Energieniveaus in x-Richtung gross genug ist, befinden sich die Elektronen immer im Grundzustand und die Dynamik in x-Richtung kann vernachlässigt werden. Man spricht in diesem Fall von einem 'zweidimensionalen Elektronengas (2DEG)'. Nehmen Sie an, das interne elektrische Feld sei $E = 10^7$ V/m. Berechnen Sie die charakteristische Ausdehnung der Elektronenwellenfunktion im Grundzustand in x-Richtung. Überprüfen sie ausserdem, ob die Elektronen bei Raumtemperatur als 2DEG bezeichnet werden können. [1]

3. **Superpositionsprinzip** $\sum 2$

Zur Präparation des Zustands eines Teilchens in einem harmonischen Oszillatorpotential mit der fundamentalen Frequenz ω steht maximal ein Energiequant zur Verfügung, d.h. $\hbar\omega$. Ein Teilchen in einem harmonischen Oszillatorpotential soll nun so präpariert werden, dass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $x > 0$ maximal wird. Berechnen Sie den Zustand für den die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich $x > 0$

maximal wird?

Der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist durch die (gerade) Funktion

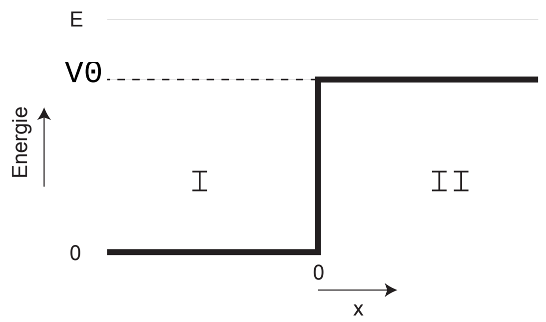
$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

gegeben und der erste angeregte Zustand durch die (ungerade) Funktion

$$u_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

4. **Potentialstufe**

Ein Teilchenstrom aus Protonen mit kinetischer Energie E trifft von links auf eine Potentialbarriere der Höhe V_0 (siehe Abbildung). $\sum 3$



(a) Geben Sie einen Ausdruck für den Anteil der reflektierten Teilchen in Abhängigkeit von E und V_0 an. Skizzieren sie den Verlauf dieser Reflektionswahrscheinlichkeit als Funktion von E/V_0 und erklären Sie. $[1\frac{1}{2}]$

(b) Wie gross ist der Anteil der reflektierten Protonen, wenn deren kinetischen Energie $E = 1$ keV und die Höhe der Potentialbarriere $V_0 = 10$ eV beträgt, und wie gross ist die Geschwindigkeit der Protonen vor und hinter der Potentialbarriere. Was würden Sie klassisch erwarten? . [1]

(c) Wie gross ist die typische Eindringtiefe von Protonen mit Energie $E = 1$ eV in den Bereich II? $[\frac{1}{2}]$

V. **Mathematica (optional)** $\sum 2$

Finden Sie numerisch die Eigenzustände der Schrödingergleichung eines harmonischen Oszillators mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ mit $m = \omega = 1$ im Bereich $x \in [-10, 10]$. Berechnen Sie die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands ψ_1 durch Anwendung des Erzeugungsoperators

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

auf den Grundzustand ψ_0 und stellen Sie ψ_1 graphisch dar.