Physik IV 2011 - Übung 7

7. April 2011

1. **Heisenbergsche Unschärferelation** $\sum 2\frac{1}{2}$

   (a) Verwenden Sie die Heisenbergsche Unschärferelation um zu zeigen, dass die Grundzustandsenergie eines harmonischen Oszillators durch $E_0 = h\nu/2$ gegeben ist. [1]

   (b) Die Stabilität von Atomen kann ebenfalls durch die Heisenbergsche Unschärferelation erklärt werden. Berechnen Sie ausgehend von der klassischen Gesamtenergie

   $$E_{\text{klass}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

   den Bahnradius eines Elektrons um den Kern. Berechnen Sie dazu das Potentialminimum unter Verwendung der Heisenbergschen Unschärferelation. Vergleichen Sie anschliessend mit einer klassischen Rechnung (Virialsatz: $E_{\text{kin}} = -E_{\text{pot}}/2$). [$1\frac{1}{2}$]

2. **Kommutatoren von Drehimpulsoperatoren** $\sum 2\frac{1}{2}$

   (a) Leiten Sie die folgenden Kommutatorrelationen her. Was bedeuten diese?

   $$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \qquad [\hat{L}_x, \hat{y}] = i\hbar\hat{z} \qquad [\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar\hat{p}_z$$
   $$[\hat{L}_x, x] = [\hat{L}_x, \hat{p}_x] = [\hat{L}_x, \hat{L}^2] = [\hat{L}_x, \hat{r}^2] = [\hat{L}_x, \hat{p}^2] = 0$$

   [1]

   (b) Die Drehimpuls-'Leiter'operatoren sind $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Leiten Sie die Kommutatorrelation $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$ her und benutzen Sie diese, um die Gültigkeit der folgenden Gleichung zu zeigen: [$\frac{1}{2}$]

   $$\hat{L}_z\hat{L}_\pm = \hat{L}_\pm\hat{L}_z \pm \hbar\hat{L}_\pm$$

(c) Der Operator $\hat{A}$ ist eine Erhaltungsgrösse, d. h. sein Erwartungswert ist konstant in der Zeit, wenn $\hat{A}$ und der Hamiltonoperator $\hat{H}$ kommutieren, $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$. Zeigen Sie, dass der Bahndrehimpuls $\hat{\vec{L}}$ eines Teilchens in einem sphärisch symmetrischen Potential mit Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ eine Erhaltungsgrösse ist. Das Potential $V(r)$ hängt hier nur von der Distanz r des Teilchens zum Koordinatenursprung ab. Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Komponente von $\hat{\vec{L}}$ mit $\hat{H}$ vertauscht. [1]

3. **Schrödingergleichung** $\sum 1$

Berechnen Sie die Dispersionrelation $\omega = \omega(p)$ aus der Forderung, dass das Gausssche Wellenpaket

$$\psi(x,t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{p^2}{2(\Delta p)^2}\right] e^{i[\frac{p}{\hbar}x - \omega(p)t]} dp$$

mit Normierungskonstante C die ein-dimensionale freie Schrödingergleichung erfüllt.

4. **3D Potentialtopf** $\sum 2$

Ein Teilchen befindet sich in einer kubischen Box mit Seitenlänge a. Die potentielle Energie ist durch

$$\begin{array}{ll} V(x,y,z) = 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < b \\ V(x,y,z) = \infty & \text{sonst} \end{array}$$

gegeben. Die Wellenfunktionen der Eigenzustände des Teilchens in der Box lauten

$$\psi = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{b}\right)$$

mit den ganzzahligen Quantenzahlen n, p, q und der Normierungskonstanten $A = 2^{3/2}/(ab^{1/2})$.

(a) Geben Sie die möglichen Energien des Teilchens an. [1]

(b) Nehmen Sie an, alle Teilchen seien Elektronen, und die Seitenlänge $a = 5b$. Die Elektronen werden – beginnend mit dem Grundzustand – in Zustände mit ansteigender Energie in die Potentialtopf gefüllt. *Schätzen* Sie ab, wieviele Elektronen in den Potentialtopf gefüllt werden können, sodass sich noch alle im Grundzustand bezüglich der $z-$ Richtung ($q = 1$) befinden. [1]

5. **Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\sum 2$

Ein Teilchen besitze im Ortsraum die Wellenfunktion ($a > 0$)

$$u(x) = \begin{cases} Axe^{-ax} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung des Impulses ein Wert zwischen $-\hbar a$ und $\hbar a$ gefunden wird? [2]

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Formeln

$$\int (\xi^2 + \alpha^2)^{-2} d\xi = \frac{\xi}{2\alpha^2(\xi^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{2\alpha^3} \arctan \frac{\xi}{\alpha} + C$$

und

$$\int_0^{+\infty} d\xi \xi^n e^{-\xi} = n!$$

IV. **Mathematica (optional)** $\sum 2$

Reproduzieren Sie die Daten in einem Pseudo-Experiment, in dem Sie Zufallszahlen generieren, deren Verteilung dem Intensitätsmuster eines Doppelspaltexperiments entspricht. Verwenden Sie dazu den Algorithmus, der in der Vorlesung zur Erzeugung von Gauss-verteilten Zufallszahlen benutzt wurde, mit der Verteilungsfunktion $\mathit{IntensityDS}[\lambda\_, d\_, y\_, R\_, a\_]$.