Physik IV 2011 - Übung 10

18. Mai 2011

1. **Wasserstoffatom** $\sum 2$

   Berechnen Sie den Erwartungswert der Gesamtenergie

   $$\langle H \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right\rangle$$

   des $1s$ und des $2p$ Zustandes und ermitteln Sie die Übergangsfrequenz zwischen diesen beiden Zuständen. Verwenden Sie dazu die Wellenfunktion $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ mit

   $$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad R_{1,0} = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$$

   $$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad R_{2,0} = 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}$$

   $$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \qquad R_{2,1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}.$$

   sowie die Formel

   $$\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = n!/a^{n+1}.$$

2. **Radialteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms** $\sum 1\frac{1}{2}$

   Die Wahrscheinlichkeit ein Elektron im $1s$ Zustand mit radialer Wellenfunktion $R(r)$ ausserhalb einer um den Kern zentrierten Kugelschale mit Radius r_0 zu finden ist durch die folgende Funktion gegeben:

   $$\int_{r_0}^\infty |R(r)|^2 r^2 dr.$$

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron ausserhalb des Bohrradius a_0, d.h. mit $r > a_0$, zu finden. $[\frac{1}{2}]$

(b) Berechnen Sie den den Erwartungswert von r, $\langle r\rangle$ und vergleichen Sie diesen Wert mit dem Radius r_{max} bei dem die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte maximal ist. Erklären Sie den Unterschied. [1]

3. **Atomare Übergänge und Zeeman Effekt** $\sum 1\frac{1}{2}$

In einem Magnetfeld werden die atomaren Energieniveaus durch den Zeeman-Effekt um

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_e} L_z$$

verschoben.

(a) Optische Dipol-Übergänge zwischen den Energieniveaus sind nur dann erlaubt, wennn die Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1$ and $\Delta m_l = 0, \pm 1$ erfüllt sind. Wie lauten die möglichen Übergänge zwischen der $n = 1$ und der $n = 2$ Schale des Wasserstoffatoms? [$\frac{1}{2}$]

(b) Was wird bei einer spektroskopischen Messung dieser Übergänge beobachtet, wenn die Stärke des Magnetfeldes erhöht wird? [$\frac{1}{2}$]

(c) Berechnen Sie die Zeeman-Aufspaltung der Spektrallinien in einem Magnetfeld von [$\frac{1}{2}$]

i. $B = 10$ T.

ii. $B = 10^{-4}$ T (dem Erdmagnetfeld).

4. **Stern-Gerlach experiment** $\sum 2$

Ein Strahl aus Wasserstoffatomen wird von einem Ofen bei der Temperatur $T = 800$ K augesandt und durch einen Stern-Gerlach Magneten der Länge $L = 2$ m geschickt. Der Gradient des magnetischen Felds beträgt 5 T/m in $z-$Richtung. Berechnen Sie die mittlere Distanz zwischen den abgelenkten Strahlen beim Verlassen des Magneten.

5. **Spin-Präzession im externen Magnetfeld** $\sum 3$

Ein ruhendes Elektron befinde sich in einem externen magnetischen Feld in positiver z-Richtung $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Der Hamiltonoperator ist für dieses Problem durch $\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}_s \cdot \vec{B}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die potentielle Energiedifferenz zwischen den beiden möglichen Spineinstellungen ($|-\frac{1}{2}\rangle$ bzw. $|\frac{1}{2}\rangle$). [1]

(b) Zeigen Sie durch Lösen der Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}|\pm\frac{1}{2}(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\pm\frac{1}{2}(t)\rangle,$$

dass die Zeitentwicklung des Zustandes $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ durch $|\pm\frac{1}{2}(t)\rangle = e^{\pm i\omega t}|\pm\frac{1}{2}(0)\rangle$ gegeben ist. Berechnen Sie die Änderungsrate ω. [1]

(c) Nehmen Sie an, das Elektron wird so präpariert, dass es sich anfangs im Superpositionszustand $\left(|\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle\right)/\sqrt{2}$ befindet. Berechnen Sie die oszillierende Komponente des magnetischen Moments in der x-Richtung, d.h. den Erwartungswert von $\hat{S}_x$. Diese Oszillationsfrequenz wird *Larmor-Frequenz* genannt.
Hinweis: Benutzen Sie dazu die Orthogonalitätsrelation $\langle\pm\frac{1}{2}|\mp\frac{1}{2}\rangle = 0$ und drücken Sie $\hat{S}_x$ durch Leiteroperatoren aus, $\hat{S}_x = (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)/2$. [1]

VII. Mathematica (optional) $\sum 2$

The wavefunction of a particle subjected to a spherically symmetric potential $V(r)$ is given by

$$\psi(\mathbf{x}) = (x + y + 3z)f(r) \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion eine Eigenfunktion des Bahndrehimpulsoperators $\mathbf{L^2}$ ist und schreiben Sie $\psi(\mathbf{x})$ als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen an. Zeigen Sie anschliessend die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte mit Hilfe der Funktion *Spherical3DPlot*, wobei $f(r)$ durch den Radialteil der Wasserstoffwellenfunktion für das berechnete l und minimales n verwendet werden soll.